

Bab 5

INTEGRASI VEKTOR

INTEGRAL BIASA DARI VEKTOR. Misalkan $\mathbf{R}(u) = R_1(u)\mathbf{i} + R_2(u)\mathbf{j} + R_3(u)\mathbf{k}$ sebuah vektor yang bergantung pada variabel skalar tunggal u , di mana $R_1(u)$, $R_2(u)$, $R_3(u)$ kontinu dalam suatu selang yang ditentukan. Maka

$$\int \mathbf{R}(u) du = \mathbf{i} \int R_1(u) du + \mathbf{j} \int R_2(u) du + \mathbf{k} \int R_3(u) du$$

disebut *integral tak tentu* dari $\mathbf{R}(u)$. Bila terdapat sebuah vektor $\mathbf{S}(u)$ sehingga $\mathbf{R}(u) = \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u))$, maka

$$\int \mathbf{R}(u) du = \int \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u)) du = \mathbf{S}(u) + \mathbf{c}$$

di mana \mathbf{c} adalah vektor konstan sebarang yang tak bergantung pada u . *Integral tentu* antara limit-limit $u = a$ dan $u = b$ dalam hal demikian dapat ditulis

$$\int_a^b \mathbf{R}(u) du = \int_a^b \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u)) du = \mathbf{S}(u) + \mathbf{c} \Big|_a^b = \mathbf{S}(b) - \mathbf{S}(a)$$

Integral ini dapat juga didefinisikan sebagai limit dari jumlah dalam cara yang analog dengan yang pada kalkulus integral elementer.

INTEGRAL GARIS. Misalkan $\mathbf{r}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$, di mana $\mathbf{r}(u)$ adalah vektor posisi dari (x, y, z) , mendefinisikan sebuah kurva C yang menghubungkan titik-titik P_1 dan P_2 , di mana $u = u_1$ dan $u = u_2$ untuk masing-masingnya.

Kita menganggap bahwa C tersusun dari sejumlah berhingga kurva-kurva di mana untuk masing-masingnya $\mathbf{r}(u)$ memiliki turunan yang kontinu. Misalkan $\mathbf{A}(x, y, z) = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ sebuah fungsi vektor dari posisi yang didefinisikan dan kontinu sepanjang C . Maka integral dari komponen tangensial \mathbf{A} sepanjang C dari P_1 ke P_2 , ditulis sebagai

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

adalah contoh dari *integral garis*. Jika \mathbf{A} adalah gaya \mathbf{F} pada sebuah partikel yang bergerak sepanjang C , maka integral garis ini menyatakan usaha yang dilakukan oleh gaya. Jika C adalah kurva tertutup (yang mana akan kita anggap sebagai *kurva tertutup sederhana*, yakni kurva yang tak memotong dirinya sendiri), maka integral mengelilingi C sering ditunjukkan oleh

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

Dalam aerodinamika dan mekanika fluida, integral ini disebut *sirkulasi* dari \mathbf{A} mengelilingi C , di mana \mathbf{A} menyatakan kecepatan dari fluida.

Pada umumnya, setiap integral yang dihitung sepanjang sebuah kurva disebut integral garis. Integral-integral demikian dapat didefinisikan dari segi-pandangan limit-limit dari jumlah-jumlah seperti halnya integral-integral kalkulus elementer.

Untuk metode-metode menghitung integral-integral garis, lihat Soal-soal yang dipecahkan.

Teorema berikut adalah penting.

TEOREMA. Jika $\mathbf{A} = \nabla\phi$ pada semua titik dalam suatu daerah R dari ruang, yang didefinisikan oleh $a_1 \leq x \leq a_2$, $b_1 \leq y \leq b_2$, $c_1 \leq z \leq c_2$, di mana $\phi(x, y, z)$ berharga tunggal dan memiliki turunan-turunan yang kontinu dalam R , maka

1. $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ tidak bergantung pada lintasan C dalam R yang menghubungkan P_1 dan P_2 .
2. $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$ mengelilingi setiap kurva tertutup C dalam R

Dalam hal demikian \mathbf{A} disebut sebuah *medan vektor konservatif* dan ϕ adalah *potensial skalarnya*.

Sebuah medan vektor \mathbf{A} adalah konservatif jika dan hanya jika $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$, atau juga ekuivalen dengan $\mathbf{A} = \nabla\phi$. Dalam hal demikian, $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz = d\phi$, suatu diferensial eksak. Lihat Soal-soal 10 – 14.

INTEGRAL PERMUKAAN. Misalkan S sebuah permukaan bersisi-dua, seperti diperlihatkan dalam gambar di bawah. Misalkan sisi yang satu dari S dipandang sebagai sisi positif (jika S adalah permukaan tertutup, ini diambil sebagai sisi luar). Sebuah normal satuan \mathbf{n} pada sebarang titik dari sisi positifnya S disebut normal satuan *positif* atau yang *digambar ke arah luar*.

Hubungkan dengan diferensial luas permukaan dS , sebuah vektor $d\mathbf{S}$ yang besarnya dS dan arahnya menurut \mathbf{n} . Maka $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$. Integral

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

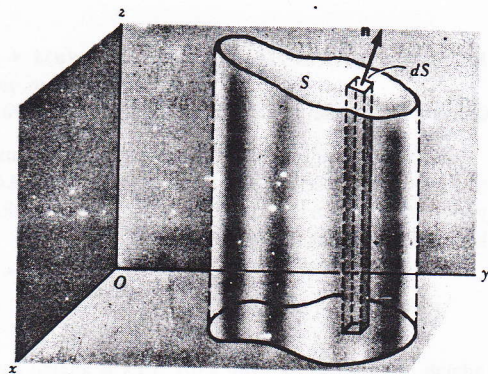
adalah contoh dari integral permukaan yang disebut *fluks* dari \mathbf{A} melalui S . Integral-integral permukaan lainnya,

$$\iint_S \phi dS, \quad \iint_S \phi \mathbf{n} dS, \quad \iint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$$

di mana ϕ adalah sebuah fungsi skalar. Integral-integral demikian dapat didefinisikan dari segi pandangan limit jumlah seperti dalam kalkulus elementer (lihat Soal 17)

Notasi \oiint_S^f kadang-kadang dipergunakan untuk menyatakan integrasi melalui permukaan tertutup S .

Dalam hal di mana tidak menimbulkan kebingungan boleh dipergunakan pula notasi \oint



Untuk menghitung integral-integral permukaan, adalah memudahkan untuk menyatakannya sebagai integral lipat dua melalui proyeksi dari luas permukaan S pada salah satu bidang koordinat. Ini mungkin jika sebarang garis yang tegak lurus bidang koordinat yang dipilih memotong permukaan hanya pada satu titik. Akan tetapi ini tidaklah mengemukakan masalah yang berarti karena pada umumnya kita dapat membagi S dalam bagian-bagian permukaan yang memenuhi persyaratan ini.

INTEGRAL VOLUME. Pandang sebuah permukaan tertutup dalam ruang yang menutup volume V . Maka

$$\iiint_V A \, dV \quad \text{dan} \quad \iiint_V c \, dV$$

adalah contoh-contoh dari *integral volume* atau *integral ruang* sebagaimana mereka biasanya disebut. Untuk menghitung integral-integral demikian, lihat Soal-soal yang dipecahkan.

Soal-soal yang Dipecahkan

1. Jika $\mathbf{R}(u) = (u - u^2)\mathbf{i} + 2u^3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, carilah (a) $\int \mathbf{R}(u) \, du$ dan (b) $\int_1^2 \mathbf{R}(u) \, du$.

$$\begin{aligned} (a) \int \mathbf{R}(u) \, du &= \int [(u - u^2)\mathbf{i} + 2u^3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}] \, du \\ &= \mathbf{i} \int (u - u^2) \, du + \mathbf{j} \int 2u^3 \, du + \mathbf{k} \int -3 \, du \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + c_1 \right) + \mathbf{j} \left(\frac{u^4}{2} + c_2 \right) + \mathbf{k} (-3u + c_3) \\ &= \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right) \mathbf{i} + \frac{u^4}{2} \mathbf{j} - 3u \mathbf{k} + c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k} \\ &= \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right) \mathbf{i} + \frac{u^4}{2} \mathbf{j} - 3u \mathbf{k} + \mathbf{c} \end{aligned}$$

di mana \mathbf{c} adalah vektor konstan $c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k}$.

$$\begin{aligned} (b) \text{ Dari (a), } \int_1^2 \mathbf{R}(u) \, du &= \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right) \mathbf{i} + \frac{u^4}{2} \mathbf{j} - 3u \mathbf{k} + \mathbf{c} \Big|_1^2 \\ &= \left[\left(\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} \right) \mathbf{i} + \frac{2^4}{2} \mathbf{j} - 3(2) \mathbf{k} + \mathbf{c} \right] - \left[\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) \mathbf{i} + \frac{1^4}{2} \mathbf{j} - 3(1) \mathbf{k} + \mathbf{c} \right] \\ &= -\frac{5}{6} \mathbf{i} + \frac{15}{2} \mathbf{j} - 3 \mathbf{k} \end{aligned}$$

Metode lain.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \mathbf{R}(u) \, du &= \mathbf{i} \int_1^2 (u - u^2) \, du + \mathbf{j} \int_1^2 2u^3 \, du + \mathbf{k} \int_1^2 -3 \, du \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^2 + \mathbf{j} \left(\frac{u^4}{2} \right) \Big|_1^2 + \mathbf{k} (-3u) \Big|_1^2 = -\frac{5}{6} \mathbf{i} + \frac{15}{2} \mathbf{j} - 3 \mathbf{k} \end{aligned}$$

2. Percepatan sebuah partikel pada setiap saat $t \geq 0$ diberikan oleh

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 12 \cos 2t \mathbf{i} - 8 \sin 2t \mathbf{j} + 16t \mathbf{k}$$

Jika kecepatan \mathbf{v} dan pergeseran \mathbf{r} adalah nol pada $t = 0$, carilah \mathbf{v} dan \mathbf{r} pada setiap saat.

$$\begin{aligned} \text{Dengan mengintegrasikan, } \mathbf{v} &= \mathbf{i} \int 12 \cos 2t \, dt + \mathbf{j} \int -8 \sin 2t \, dt + \mathbf{k} \int 16t \, dt \\ &= 6 \sin 2t \mathbf{i} + 4 \cos 2t \mathbf{j} + 8t^2 \mathbf{k} + \mathbf{c}_1 \end{aligned}$$

Dengan mengambil $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ bila $t = 0$, kita peroleh $\mathbf{0} = 0\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k} + \mathbf{c}_1$ dan $\mathbf{c}_1 = -4\mathbf{j}$.

Maka $\mathbf{v} = 6 \sin 2t \mathbf{i} + (4 \cos 2t - 4) \mathbf{j} + 8t^2 \mathbf{k}$
 Sehingga $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 6 \sin 2t \mathbf{i} + (4 \cos 2t - 4) \mathbf{j} + 8t^2 \mathbf{k}$.

Dengan mengintegrasikan, $\mathbf{r} = \mathbf{i} \int 6 \sin 2t \, dt + \mathbf{j} \int (4 \cos 2t - 4) \, dt + \mathbf{k} \int 8t^2 \, dt$
 $= -3 \cos 2t \mathbf{i} + (2 \sin 2t - 4t) \mathbf{j} + \frac{8}{3} t^3 \mathbf{k} + \mathbf{c}_2$

Dengan mengambil $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ apabila $t = 0$, $\mathbf{0} = -3\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} + \mathbf{c}_2$ dan $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{i}$.

Maka $\mathbf{r} = (3 - 3 \cos 2t) \mathbf{i} + (2 \sin 2t - 4t) \mathbf{j} + \frac{8}{3} t^3 \mathbf{k}$.

3. Hitunglah $\int \mathbf{A} \times \frac{d^2 \mathbf{A}}{dt^2} dt$.

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) = \mathbf{A} \times \frac{d^2 \mathbf{A}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{A} \times \frac{d^2 \mathbf{A}}{dt^2}$$

Dengan mengintegrasikan, $\int \mathbf{A} \times \frac{d^2 \mathbf{A}}{dt^2} dt = \int \frac{d}{dt} \left(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) dt = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{c}$.

4. Persamaan gerak sebuah partikel P bermassa m diberikan oleh

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = f(r) \mathbf{r}_1$$

di mana \mathbf{r} adalah vektor posisi P diukur dari titik asal O , \mathbf{r}_1 vektor satuan dalam arah \mathbf{r} , dan $f(r)$ sebuah fungsi dari jarak P ke O .

- Perlihatkan bahwa $\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{c}$ di mana \mathbf{c} sebuah vektor konstan.
- Berikan interpretasi fisisnya untuk kasus-kasus $f(r) < 0$ dan $f(r) > 0$.
- Berikan interpretasi geometris dari hasil di (a).
- Uraikan bagaimana hasil-hasil yang diperoleh di atas dalam hubungannya dengan gerak planet-planet dalam sistem tata surya kita.

(a) Perkalikan kedua ruas dari $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = f(r) \mathbf{r}_1$ dengan $\mathbf{r} \times$ Maka

$$m \mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = f(r) \mathbf{r} \times \mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$$

karena \mathbf{r} dan \mathbf{r}_1 searah, maka $\mathbf{r} \times \mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$. Jadi

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{0} \quad \text{dan} \quad \frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \mathbf{0}$$

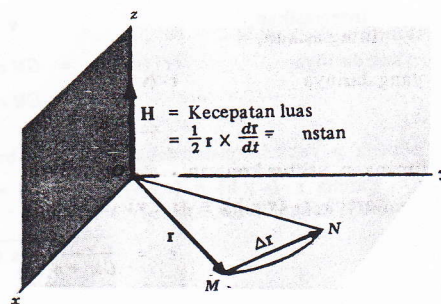
Dengan mengintegrasikan, $\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{c}$, di mana \mathbf{c} adalah vektor konstan. (Bandingkan dengan Soal 3).

- (b) Jika $f(r) < 0$ percepatan $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ arahnya berlawanan dengan \mathbf{r}_1 ; karena itu, arah gayanya menuju O dan partikel selalu tertarik menuju O .

Jika $f(r) > 0$ arah gayanya menjauhi O dan partikel berada di bawah pengaruh sebuah gaya tolak di O .

Sebuah gaya yang arahnya menuju atau menjauhi sebuah titik tetap O dan besarnya hanya bergantung pada jarak r dari O disebut gaya sentral.

- (c) Dalam waktu Δt partikel bergerak dari M ke N (Lihat gambar disamping). Luas yang disapu vektor posisi dalam waktu ini mendekati separuh luas sebuah jajaran genjang dengan sisi-sisi r dan Δr , atau $\frac{1}{2} r \times \Delta r$. Maka luas pendekatan yang disapu oleh vektor jejari setiap satuan waktu adalah $\frac{1}{2} r \times \frac{\Delta r}{\Delta t}$; oleh sebab itu laju perubahan luas se-



$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} r \times \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{1}{2} r \times \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} r \times v$$

dimana v adalah kecepatan sesaat dari partikel. Besaran $H = \frac{1}{2} r \times \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} r \times v$ disebut *kecepatan luas*. Dari bagian (a),

$$\text{Kecepatan luas} = H = \frac{1}{2} r \times \frac{dr}{dt} = \text{konstan}$$

Karena $r \cdot H = 0$, gerakanya dalam sebuah bidang, yang kita ambilkan sebagai bidang xy dalam gambar di atas.

- (d) Sebuah planet (seperti bumi) ditarik menuju matahari menurut hukum universal gravitasi Newton, yang menyatakan bahwa dua buah benda yang masing-masingnya bermassa m dan M saling tarik menarik dengan sebuah gaya yang besarnya $F = \frac{GMm}{r^2}$, dimana r adalah jarak antara obyek-obyek dan G sebuah konstanta universal. Misalkan m dan M adalah masing-masing massa planet dan matahari dan pilihkan suatu sistem koordinat dengan titik asal di matahari. Maka persamaan gerak dari planet adalah

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{r}_1 \quad \text{atau} \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{r}_1$$

dengan anggapan bahwa pengaruh planet-planet lain dapat diabaikan.

Menurut bagian (c), vektor posisi sebuah planet yang bergerak mengelilingi matahari menyapu luas yang sama dalam waktu yang sama. Hasil ini dan yang dari Soal 5 adalah dua dari ketiga hukum Kepler yang terkenal yang ia deduksikan secara empiris dari tumpukan data yang dikumpulkan dan disusun oleh ilmuwan astronomy Tycho Brahe. Hukum-hukum ini memungkinkan Newton merumuskan hukum universal gravitasinya. Untuk hukum Kepler ketiga, lihat Soal 36.

5. Perlihatkan bahwa lintasan sebuah planet mengelilingi matahari adalah sebuah elips dengan matahari pada salah satu titik apinya.

Dari Soal-soal 4(c) dan 4(d),

$$(1) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{r}_1$$

$$(2) \quad \mathbf{r} \times \mathbf{v} = 2\mathbf{H} = \mathbf{h}$$

Sekarang $\mathbf{r} = r \mathbf{r}_1$, $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = r \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{dr}{dt} \mathbf{r}_1$ sehingga

$$(3) \quad \mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = r \mathbf{r}_1 \times \left(r \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{dr}{dt} \mathbf{r}_1 \right) = r^2 \mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

$$\begin{aligned} \text{Dari (1), } \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{h} &= -\frac{GM}{r^2} \mathbf{r}_1 \times \mathbf{h} = -GM \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}) \\ &= -GM [(\mathbf{r}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}) \mathbf{r}_1 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1) \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}] = GM \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \end{aligned}$$

Pergunakan persamaan (3) dan kenyataan bahwa $\mathbf{r}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = 0$ (Soal 9, Bab 3).

Tetapi karena \mathbf{h} adalah vektor konstan, $\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{h} = \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \times \mathbf{h})$ sehingga

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = GM \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

Integrasikan,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{h} = GM \mathbf{r}_1 + \mathbf{p}$$

yang darinya

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) &= GM \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \\ &= GM r + r \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{p} = GM r + r p \cos \theta \end{aligned}$$

dimana \mathbf{p} vektor konstan sebarang dengan besar p , dan θ adalah sudut antara \mathbf{p} dan \mathbf{r}_1 .

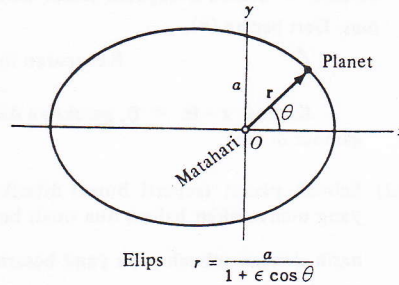
Karena $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = h^2$, kita peroleh $h^2 = GM r + r p \cos \theta$ dan

$$r = \frac{h^2}{GM + p \cos \theta} = \frac{h^2/GM}{1 + (p/GM) \cos \theta}$$

Dari ilmu-ukur analitik, persamaan polar/kutub sebuah irisan kerucut dengan titik apinya berada pada titik

asal dan eksentrisitasnya ϵ adalah $r = \frac{a}{1 + \epsilon \cos \theta}$ di

mana a suatu konstanta. Bandingkan ini dengan persamaan yang diturunkan, nampak bahwa orbit yang disyaratkan adalah sebuah irisan kerucut dengan eksentrisitas $\epsilon = p/GM$. Orbitnya adalah sebuah elips, parabola atau hiperbola apabila ϵ lebih kecil daripada, sama dengan atau lebih besar daripada satu. Karena orbit dari planet-planet tertutup, mereka haruslah berbentuk elips-elips.



INTEGRAL GARIS

6. Jika $\mathbf{A} = (3x^2 + 6y)\mathbf{i} - 14yz\mathbf{j} + 20xz^2\mathbf{k}$, hitunglah $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ dari $(0, 0, 0)$ ke $(1, 1, 1)$ sepanjang

lintasan-lintasan C berikut :

(a) $x = t, y = t^2, z = t^3$.

(b) garis-garis lurus dari $(0, 0, 0)$ ke $(1, 0, 0)$, kemudian ke $(1, 1, 0)$ dan kemudian ke $(1, 1, 1)$.

(c) garis lurus yang menghubungkan $(0, 0, 0)$ dan $(1, 1, 1)$.

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C [(3x^2 + 6y)\mathbf{i} - 14yz\mathbf{j} + 20xz^2\mathbf{k}] \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= \int_C (3x^2 + 6y) dx - 14yz dy + 20xz^2 dz \end{aligned}$$

(a) Jika $x = t, y = t^2, z = t^3$, titik-titik $(0, 0, 0)$ dan $(1, 1, 1)$ masing-masingnya berhubungan dengan $t = 0$ dan $t = 1$. Maka

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t=0}^1 (3t^2 + 6t^2) dt - 14(t^2)(t^3) d(t^2) + 20(t)(t^3)^2 d(t^3) \\ &= \int_{t=0}^1 9t^2 dt - 28t^5 dt + 60t^9 dt \\ &= \int_{t=0}^1 (9t^2 - 28t^5 + 60t^9) dt = 3t^3 - 4t^7 + 6t^{10} \Big|_0^1 = 5 \end{aligned}$$

Metode lain,

Sepanjang C , $\mathbf{A} = 9t^2\mathbf{i} - 14t^5\mathbf{j} + 20t^7\mathbf{k}$ dan $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ dan $d\mathbf{r} = (t + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}) dt$.

$$\begin{aligned} \text{Maka } \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t=0}^1 (9t^2\mathbf{i} - 14t^5\mathbf{j} + 20t^7\mathbf{k}) \cdot (t + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}) dt \\ &= \int_0^1 (9t^2 - 28t^5 + 60t^9) dt = 5 \end{aligned}$$

- (b) Sepanjang garis lurus dari $(0, 0, 0)$ ke $(1, 0, 0)$ $y = 0$, $z = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$ sedangkan x berubah dari 0 hingga 1. Maka integral sepanjang bagian lintasan ini adalah

$$\int_{x=0}^1 (3x^2 + 6(0)) dx - 14(0)(0)(0) + 20x(0)^2(0) = \int_{x=0}^1 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^1 = 1$$

Sepanjang garis lurus dari $(1, 0, 0)$ ke $(1, 1, 0)$, $x = 1$, $z = 0$, $dx = 0$, $dz = 0$ sedangkan y berubah dari 0 hingga 1. Maka integral sepanjang bagian lintasan ini adalah

$$\int_{y=0}^1 (3(1)^2 + 6y) 0 - 14y(0) dy + 20(1)(0)^2 0 = 0$$

Sepanjang garis lurus dari $(1, 1, 0)$ ke $(1, 1, 1)$ $x = 1$, $y = 1$, $dx = 0$, $dy = 0$ sedangkan z berubah dari 0 hingga 1. Maka integral sepanjang bagian lintasan ini adalah

$$\int_{z=0}^1 (3(1)^2 + 6(1)) 0 - 14(1)z(0) + 20(1)z^2 dz = \int_{z=0}^1 20z^2 dz = \frac{20z^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{20}{3}$$

$$\text{Jumlahkan,} \quad \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 1 + 0 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}$$

- (c) Garis lurus yang menghubungkan $(0, 0, 0)$ dan $(1, 1, 1)$ dalam bentuk parametrik diberikan oleh $x = t$, $y = t$, $z = t$. Maka

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t=0}^1 (3t^2 + 6t) dt - 14(t)(t) dt + 20(t)(t)^2 dt \\ &= \int_{t=0}^1 (3t^2 + 6t - 14t^2 + 20t^3) dt = \int_{t=0}^1 (6t - 11t^2 + 20t^3) dt = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

7. Carilah usaha total yang dilakukan untuk menggerakkan sebuah partikel dalam medan gaya yang diberikan oleh $\mathbf{F} = 3xy \mathbf{i} - 5z \mathbf{j} + 10x \mathbf{k}$ sepanjang kurva $x = t^2 + 1$, $y = 2t^2$, $z = t^3$ dari $t = 1$ hingga $t = 2$.

$$\begin{aligned} \text{Usaha total} &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (3xy \mathbf{i} - 5z \mathbf{j} + 10x \mathbf{k}) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) \\ &= \int_C 3xy dx - 5z dy + 10x dz \\ &= \int_{t=1}^2 3(t^2 + 1)(2t^2) d(t^2 + 1) - 5(t^3) d(2t^2) + 10(t^2 + 1) d(t^3) \\ &= \int_1^2 (12t^5 + 10t^4 + 12t^3 + 30t^2) dt = 303 \end{aligned}$$

8. Jika $\mathbf{F} = 3xy \mathbf{i} - y^2 \mathbf{j}$, hitunglah $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ di mana C adalah kurva dalam bidang $y = 2x^2$, dari $(0, 0)$ hingga $(1, 2)$.

Karena integrasi dilakukan dalam bidang xy ($z = 0$), kita dapat mengambil $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Maka

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (3xy \mathbf{i} - y^2 \mathbf{j}) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}) \\ &= \int_C 3xy dx - y^2 dy \end{aligned}$$

Metode pertama. Misalkan $x = t$ dalam $y = 2x^2$. Maka persamaan-persamaan parameter dari C adalah $x = t$, $y = 2t^2$. Titik-titik $(0,0)$ dan $(1, 2)$ masing-masingnya berhubungan dengan $t = 0$ dan $t = 1$. Maka

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^1 3(t)(2t^2) dt - (2t^2)^2 d(2t^2) = \int_{t=0}^1 (6t^3 - 16t^5) dt = -\frac{7}{6}$$

Metode kedua. Substitusikan $y = 2x^2$ secara langsung, dimana x mulai dari 0 hingga 1. Maka

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x=0}^1 3x(2x^2) dx - (2x^2)^2 d(2x^2) = \int_{x=0}^1 (6x^3 - 16x^5) dx = -\frac{7}{6}$$

Perhatikan bahwa bila kurva dilintasi dalam arah sebaliknya, yakni dari $(1, 2)$ ke $(0, 0)$, harga integral akan menjadi $7/6$ daripada $-7/6$.

9. Carilah usaha yang dilakukan dalam menggerakkan sebuah partikel mengelilingi lingkaran C dalam bidang xy sekali, jika lingkaran berpusat di titik asal dan berjari 3 dan medan gaya diberikan oleh

$$\mathbf{F} = (2x - y + z)\mathbf{i} + (x + y - z^2)\mathbf{j} + (3x - 2y + 4z)\mathbf{k}$$

Dalam bidang $z=0$, $\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}$ dan $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ sehingga usaha yang dilakukan adalah

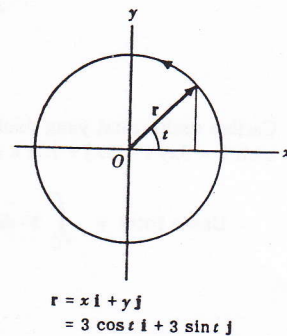
$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C [(2x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}] \cdot [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}] \\ &= \int_C (2x - y) dx + (x + y) dy \end{aligned}$$

Pilih persamaan-persamaan parameter lingkaran sebagai $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$ di mana t berubah dari 0 hingga 2π (lihat gambar disamping).

Maka integral lintasan sama-dengan

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{2\pi} [2(3 \cos t) - 3 \sin t] [-3 \sin t] dt + [3 \cos t + 3 \sin t] [3 \cos t] dt \\ = \int_0^{2\pi} (9 - 9 \sin t \cos t) dt = 9t - \frac{9}{2} \sin^2 t \Big|_0^{2\pi} = 18\pi \end{aligned}$$

Dalam melintasi C kita telah memilih arah berlawanan perputaran jarum jam yang ditunjukkan dalam gambar disamping. Kita menyebutnya arah positif, atau mengatakan bahwa C telah dilintasi dalam arah positif. Jika C dilintasi dalam arah perputaran jarum jam (negatif) harga integral akan menjadi -18π .



10. (a) Jika $\mathbf{F} = \nabla\phi$, di mana ϕ berharga tunggal dan memiliki turunan-turunan parsial yang kontinu, perhatikan bahwa usaha yang dilakukan dalam menggerakkan sebuah partikel dari satu titik $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ dalam medan ini ke titik lainnya $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ tidak bergantung pada lintasan yang menghubungkan kedua buah titik.

- (b) Sebaliknya, jika $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tidak bergantung pada lintasan C yang menghubungkan dua buah titik sebarang, maka perhatikan bahwa ada terdapat suatu fungsi ϕ sehingga $\mathbf{F} = \nabla\phi$.

$$\begin{aligned} \text{(a) Usaha yang dilakukan} &= \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \\
 &= \int_{P_1}^{P_2} d\phi = \phi(P_2) - \phi(P_1) = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1)
 \end{aligned}$$

Jadi integral hanya bergantung pada titik-titik P_1 dan P_2 dan tidak pada lintasan yang menghubungkan mereka. Ini hanyalah benar jika $\phi(x, y, z)$ berharga tunggal pada semua titik-titik P_1 dan P_2 .

(b) Misalkan $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$. Menurut hipotesis, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tidak bergantung pada lintasan C yang menghubungkan dua buah titik sebarang, yang masing-masingnya kita ambil sebagai (x_1, y_1, z_1) dan (x, y, z) . Maka

$$\phi(x, y, z) = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x, y, z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x, y, z)} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

tak bergantung pada lintasan yang menghubungkan (x_1, y_1, z_1) dan (x, y, z) . Jadi

$$\begin{aligned}
 \phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z) &= \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x + \Delta x, y, z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x, y, z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \int_{(x, y, z)}^{(x + \Delta x, y, z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x, y, z)}^{(x + \Delta x, y, z)} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \\
 &= \int_{(x, y, z)}^{(x + \Delta x, y, z)} F_1 dx
 \end{aligned}$$

Karena integral terakhir di atas haruslah tak bergantung pada lintasan yang menghubungkan (x, y, z) dan $(x + \Delta x, y, z)$, kita dapat memilih lintasannya berbentuk garis-lurus yang menghubungkan titik-titik ini sehingga dy dan dz adalah nol. Maka

$$\frac{\phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_{(x, y, z)}^{(x + \Delta x, y, z)} F_1 dx$$

Ambilkan limit dari kedua ruas jika $\Delta x \rightarrow 0$, kita peroleh $\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_1$.

Dengan cara yang sama, kita dapat memperlihatkan bahwa $\frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2$ dan $\frac{\partial \phi}{\partial z} = F_3$.

Maka $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} = \nabla \phi$.

Jika $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tak bergantung pada lintasan C yang menghubungkan P_1 dan P_2 , maka \mathbf{F} konservatif, dan sebaliknya $\mathbf{F} = \nabla \phi$.

Bukti dengan mempergunakan vektor. Jika integral garis tak bergantung pada lintasan, maka

$$\phi(x, y, z) = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x, y, z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x, y, z)} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds$$

Dengan menurunkan, $\frac{d\phi}{ds} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}$. Tetapi $\frac{d\phi}{ds} = \nabla \phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ sehingga $(\nabla \phi - \mathbf{F}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = 0$.

Karena ini harus berlaku untuk sebarang harga $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$, kita peroleh $\mathbf{F} = \nabla \phi$.

11. (a) Jika \mathbf{F} suatu medan konservatif, buktikan bahwa $\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ (yakni \mathbf{F} adalah irotasional!)

(b) Sebaliknya, jika $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ (yakni \mathbf{F} adalah irotasional), buktikan bahwa \mathbf{F} konservatif.

(a) Jika \mathbf{F} suatu medan konservatif, maka menurut Soal 10, $\mathbf{F} = \nabla \phi$.

Jadi $\text{Curl } \mathbf{F} = \nabla \times \nabla \phi = \mathbf{0}$ (lihat Soal 27 (a), Bab 4).

(b) Jika $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, maka

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \text{ dan dengan demikian}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

Kita harus membuktikan bahwa $\mathbf{F} = \nabla \phi$ sebagai konsekuensinya.

Usaha yang dilakukan untuk menggerakkan sebuah partikel dari (x_1, y_1, z_1) ke (x, y, z) dalam medan gaya \mathbf{F} adalah

$$\int_C F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz$$

dimana C adalah lintasan yang menghubungkan (x_1, y_1, z_1) dan (x, y, z) . Baiklah kita memilih lintasan khusus, yakni potongan-potongan garis-lurus dari (x_1, y_1, z_1) ke (x, y_1, z_1) ke (x, y, z_1) ke (x, y, z) dan menyebut $\phi(x, y, z)$ usaha yang dilakukan sepanjang lintasan khusus ini. Maka

$$\phi(x, y, z) = \int_{x_1}^x F_1(x, y_1, z_1) dx + \int_{y_1}^y F_2(x, y, z_1) dy + \int_{z_1}^z F_3(x, y, z) dz$$

Dari sini diperoleh

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = F_3(x, y, z)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= F_2(x, y, z_1) + \int_{z_1}^z \frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z) dz \\ &= F_2(x, y, z_1) + \int_{z_1}^z \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z) dz \\ &= F_2(x, y, z_1) + F_2(x, y, z) \Big|_{z_1}^z = F_2(x, y, z_1) + F_2(x, y, z) - F_2(x, y, z_1) = F_2(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= F_1(x, y_1, z_1) + \int_{y_1}^y \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z_1) dy + \int_{z_1}^z \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z) dz \\ &= F_1(x, y_1, z_1) + \int_{y_1}^y \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z_1) dy + \int_{z_1}^z \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) dz \\ &= F_1(x, y_1, z_1) + F_1(x, y, z_1) \Big|_{y_1}^y + F_1(x, y, z) \Big|_{z_1}^z \\ &= F_1(x, y_1, z_1) + F_1(x, y, z_1) - F_1(x, y_1, z_1) + F_1(x, y, z) - F_1(x, y, z_1) = F_1(x, y, z) \end{aligned}$$

Maka $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} = \nabla \phi$.

Jadi syarat perlu dan cukup agar sebuah medan \mathbf{F} konservatif adalah bahwa $\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

12. (a) Perlihatkan bahwa $\mathbf{F} = (2xy + z^3)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$ sebuah medan gaya konservatif. (b) Carilah potensial skalar. (c) Carilah usaha yang dilakukan dalam menggerakkan sebuah benda dalam medan ini dari $(1, -2, 1)$ ke $(3, 1, 4)$.

(a) Dari Soal 11, syarat perlu dan cukup agar sebuah gaya konservatif adalah $\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

$$\text{Sekarang } \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Jadi \mathbf{F} sebuah medan-gaya konservatif.

(b) *Metode Pertama.*

Menurut Soal 10, $\mathbf{F} = \nabla\phi$ atau $\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = (2xy + z^3)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$. Maka

$$(1) \frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy + z^3 \quad (2) \frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2 \quad (3) \frac{\partial\phi}{\partial z} = 3xz^2$$

Integrasikan, kita peroleh dari (1), (2) dan (3), masing-masing

$$\begin{aligned} \phi &= x^2y + xz^3 + f(y, z) \\ \phi &= x^2y + g(x, z) \\ \phi &= xz^3 + h(x, y) \end{aligned}$$

Ini sesuai apabila kita memilih $f(y, z) = 0$, $g(x, z) = xz^3$, $h(x, y) = x^2y$ sehingga dengan demikian $\phi = x^2y + xz^3$ dengan tambahan sebarang konstanta.

Metode Kedua.

Karena \mathbf{F} konservatif, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tidak bergantung pada lintasan C yang menghubungkan (x_1, y_1, z_1)

dan (x, y, z) . Dengan mempergunakan metode dari Soal 11(b),

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= \int_{x_1}^x (2xy_1 + z_1^3) dx + \int_{y_1}^y x^2 dy + \int_{z_1}^z 3xz^2 dz \\ &= (x^2y_1 + xz_1^3) \Big|_{x_1}^x + x^2y \Big|_{y_1}^y + xz^3 \Big|_{z_1}^z \\ &= x^2y_1 + xz_1^3 - x_1^2y_1 - x_1z_1^3 + x^2y - x^2y_1 + xz^3 - xz_1^3 \\ &= x^2y + xz^3 - x_1^2y_1 - x_1z_1^3 = x^2y + xz^3 + \text{konstanta} \end{aligned}$$

$$\text{Metode Ketiga. } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz = d\phi$$

$$\begin{aligned} \text{Maka } d\phi &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (2xy + z^3) dx + x^2 dy + 3xz^2 dz \\ &= (2xy dx + x^2 dy) + (z^3 dx + 3xz^2 dz) \\ &= d(x^2y) + d(xz^3) = d(x^2y + xz^3) \end{aligned}$$

dan $\phi = x^2y + xz^3 + \text{konstanta}$.

$$\begin{aligned}
 \text{(c) Usaha yang dilakukan} &= \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \int_{P_1}^{P_2} (2xy + z^3) dx + x^2 dy + 3xz^2 dz \\
 &= \int_{P_1}^{P_2} d(x^2y + xz^3) = x^2y + xz^3 \Big|_{P_1}^{P_2} = x^2y + xz^3 \Big|_{(1, -2, 1)}^{(3, 1, 4)} = 202
 \end{aligned}$$

Metode lain

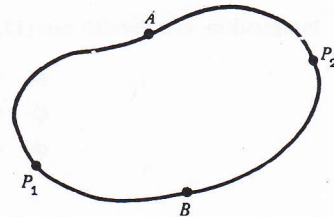
Dari bagian (b), $\phi(x, y, z) = x^2y + xz^3 + \text{konstanta}$.

Usaha yang dilakukan $= \phi(3, 1, 4) - \phi(1, -2, 1) = 202$.

13. Buktikan bahwa jika $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tak bergantung pada lintasan yang menghubungkan dua buah titik sebarang P_1 dan P_2 dalam suatu daerah yang diberikan, maka $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ untuk semua lintasan tertutup dalam daerah itu dan begitupula sebaliknya.

Misalkan $P_1AP_2BP_1$ (lihat gambar disamping) adalah sebuah kurva tertutup. Maka

$$\begin{aligned}
 \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{P_1AP_2BP_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{P_2BP_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \int_{P_1AP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{P_1BP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0
 \end{aligned}$$



karena berdasarkan hipotesis integral dari P_1 hingga P_2 sepanjang lintasan yang melalui A sama dengan yang melalui B .

Sebaliknya, jika $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$, maka

$$\int_{P_1AP_2BP_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{P_2BP_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{P_1BP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

sehingga, $\int_{P_1AP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1BP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

14. (a) Perhatikan bahwa syarat perlu dan cukup agar $F_1dx + F_2dy + F_3dz$ suatu diferensial eksak adalah bahwa $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ di mana $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$.

- (b) Perhatikan bahwa $(y^2z^3 \cos x - 4x^3z) dx + 2z^3y \sin x dy + (3y^2z^2 \sin x - x^4) dz$ suatu diferensial eksak dari sebuah fungsi ϕ dan carilah ϕ .

- (a) Andaikan $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$, suatu diferensial eksak. Karena x, y dan z adalah variabel-variabel yang bebas satu terhadap lainnya, maka

$$F_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad F_3 = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

dan dengan demikian $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} = \nabla \phi$. Jadi $\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla \phi = \mathbf{0}$.

Sebaliknya, jika $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ maka menurut Soal 11, $\mathbf{F} = \nabla \phi$ dan dengan demikian $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = d\phi$, yakni $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = d\phi$, suatu diferensial eksak.

(b) $\mathbf{F} = (y^2 z^3 \cos x - 4x^3 z)\mathbf{i} + 2z^3 y \sin x \mathbf{j} + (3y^2 z^2 \sin x - x^4)\mathbf{k}$ dan $\nabla \times \mathbf{F}$

dihitung berharga nol, sehingga menurut bagian (a)

$$(y^2 z^3 \cos x - 4x^3 z) dx + 2z^3 y \sin x dy + (3y^2 z^2 \sin x - x^4) dz = d\phi$$

Menurut metode-metode dari Soal 12 kita peroleh $\phi = y^2 z^3 \sin x - x^4 z + \text{konstanta}$.

15. Misalkan \mathbf{F} sebuah medan konservatif sehingga $\mathbf{F} = -\nabla \phi$. Andaikan sebuah partikel bermassa konstan m bergerak dalam medan ini. Jika A dan B adalah dua buah titik dalam ruang, buktikan bahwa

$$\phi(A) + \frac{1}{2}mv_A^2 = \phi(B) + \frac{1}{2}mv_B^2$$

di mana v_A dan v_B masing-masingnya adalah besar kecepatan partikel di A dan B .

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}. \quad \text{Maka} \quad \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2.$$

$$\text{Integrasikan,} \quad \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{m}{2} v^2 \Big|_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2.$$

$$\text{Jika } \mathbf{F} = -\nabla \phi, \quad \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_A^B \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = - \int_A^B d\phi = \phi(A) - \phi(B).$$

Maka $\phi(A) - \phi(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$ dan dari sini diperoleh hasilnya.

$\phi(A)$ disebut *energi potensial* di A dan $\frac{1}{2}mv_A^2$ *energi kinetik* di A . Hasil di atas menyatakan bahwa energi total di A sama dengan energi total di B (kekekalan energi). Perhatikan penggunaan tanda negatif dalam $\mathbf{F} = -\nabla \phi$.

16. Jika $\phi = 2xyz^2$, $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ dan C adalah kurva $x = t^2$, $y = 2t$, $z = t^3$ dari $t = 0$ hingga $t = 1$, maka

hitunglah integral-integral garis (a) $\int_C \phi d\mathbf{r}$, (b) $\int_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r}$.

(a) Sepanjang C , $\phi = 2xyz^2 = 2(t^2)(2t)(t^3)^2 = 4t^9$,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \quad \text{dan}$$

$$d\mathbf{r} = (2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}) dt. \quad \text{Maka}$$

$$\begin{aligned} \int_C \phi d\mathbf{r} &= \int_{t=0}^1 4t^9 (2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}) dt \\ &= \mathbf{i} \int_0^1 8t^{10} dt + \mathbf{j} \int_0^1 8t^9 dt + \mathbf{k} \int_0^1 12t^{11} dt = \frac{8}{11}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j} + \mathbf{k} \end{aligned}$$

(b) Sepanjang C , $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k} = 2t^3\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$.

$$\text{Maka } \mathbf{F} \times d\mathbf{r} = (2t^3\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}) \times (2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}) dt$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t^3 & -t^3 & t^4 \\ 2t & 2 & 3t^2 \end{vmatrix} dt = [(-3t^5 - 2t^4)\mathbf{i} + (2t^5 - 6t^5)\mathbf{j} + (4t^3 + 2t^4)\mathbf{k}] dt$$

$$\begin{aligned} \text{dan } \int_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r} &= \mathbf{i} \int_0^1 (-3t^5 - 2t^4) dt + \mathbf{j} \int_0^1 (-4t^5) dt + \mathbf{k} \int_0^1 (4t^3 + 2t^4) dt \\ &= -\frac{9}{10} \mathbf{i} - \frac{2}{3} \mathbf{j} + \frac{7}{5} \mathbf{k} \end{aligned}$$

INTEGRAL PERMUKAAN

17. Berikan definisi dari $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$ melalui permukaan S dalam limit dari suatu jumlah.

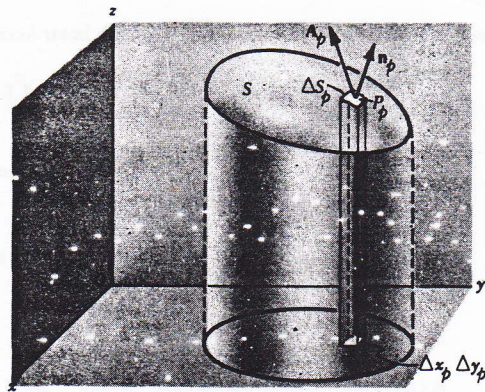
Bagikan S kedalam M buah elemen luas ΔS_p di mana $p = 1, 2, 3, \dots, M$. Pilih sebarang titik P_p di dalam ΔS_p yang koordinat-koordinatnya (x_p, y_p, z_p) . Definisikan $\mathbf{A}(x_p, y_p, z_p) = \mathbf{A}_p$. Misalkan \mathbf{n}_p adalah normal satuan positif terhadap ΔS_p di P . Bentuk penjumlahan

$$\sum_{p=1}^M \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}_p \Delta S_p$$

di mana $\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}_p$ adalah komponen normal dari \mathbf{A}_p di P_p .

Sekarang ambilkan limit dari jumlah ini bila $M \rightarrow \infty$ sedemikian rupa sehingga ukuran terbesar dari tiap-tiap ΔS_p mendekati nol. Bila limit ini ada, ia disebut integral permukaan dari komponen normal \mathbf{A} melalui S dan dinyatakan oleh

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$$



18. Andaikan proyeksi permukaan S pada bidang xy adalah R (lihat gambar dari Soal 17). Perhatikan bahwa

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_R \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dx \, dy}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}$$

Menurut Soal 17, integral permukaan adalah limit dari jumlah

$$(1) \quad \sum_{p=1}^M \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}_p \Delta S_p$$

Proyeksi ΔS_p pada bidang xy adalah $|(\mathbf{n}_p \Delta S_p) \cdot \mathbf{k}|$ atau $|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k}| \Delta S_p$ yang mana sama dengan $\Delta x_p \Delta y_p$ sehingga $\Delta S_p = \frac{\Delta x_p \Delta y_p}{|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k}|}$. Jadi jumlah (1) menjadi

$$(2) \quad \sum_{p=1}^M \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}_p \frac{\Delta x_p \Delta y_p}{|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k}|}$$

Menurut teorema dasar dari kalkulus integral, limit jumlah ini bila $M \rightarrow \infty$ sedemikian rupa sehingga Δx_p dan Δy_p yang terbesar mendekati nol, adalah

$$\iint_R \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dx dy}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}$$

Dengan demikian terbukti hasil yang dikehendaki.

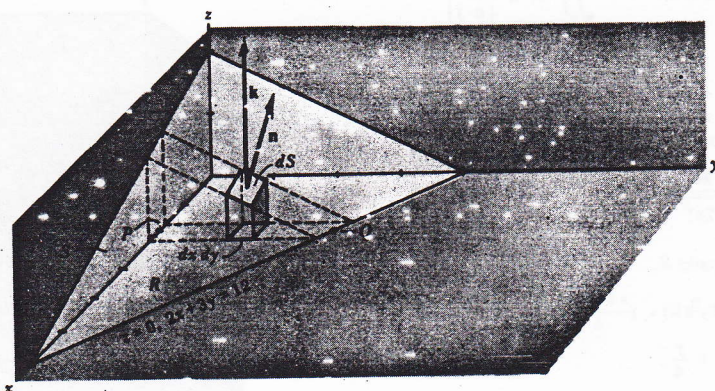
Secara tegas, hasil $\Delta S_p = \frac{\Delta x_p \Delta y_p}{|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k}|}$ hanyalah mendekati benar tetapi dapat diperlihatkan dengan pe-

ngujian yang lebih lanjut bahwa masing-masingnya berbeda dari satu dengan yang lainnya hanya oleh infinitesimal-infinitesimal dengan orde lebih besar daripada $\Delta x_p \Delta y_p$. Dengan mempergunakan kenyataan ini, limit-limit dari (1) dan (2) dapat diperlihatkan sama besarnya.

19. Hitunglah $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$, di mana $\mathbf{A} = 18z\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$ dan S adalah bagian dari bidang $2x + 3y +$

$6z = 12$ yang terletak dalam oktan pertama.

Permukaan S dan proyeksi R nya pada bidang xy diperlihatkan dalam gambar di bawah.



Dari Soal 17,

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_R \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dx dy}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}$$

Untuk memperoleh \mathbf{n} , perhatikan kembali bahwa sebuah vektor yang tegak lurus terhadap permukaan $2x + 3y + 6z = 12$ diberikan oleh $\nabla(2x+3y+6z) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ (lihat Soal 5 dari Bab 4). Maka normal satuan terhadap sebarang titik dari S (lihat gambar di atas) adalah

$$\mathbf{n} = \frac{2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

Jadi $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = (\frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = \frac{6}{7}$ dan dengan demikian $\frac{dx dy}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|} = \frac{7}{6} dx dy$.

$$\text{Juga } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = (18z\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}) \cdot (\frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}) = \frac{36z - 36 + 18y}{7} = \frac{36 - 12x}{7}$$

di mana dipergunakan kenyataan bahwa $z = \frac{12 - 2x - 3y}{6}$ dari persamaan untuk S . Maka

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_R \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dx dy}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|} = \iint_R (\frac{36 - 12x}{7}) \frac{7}{6} dx dy = \iint_R (6 - 2x) dx dy$$

Untuk menghitung integral lipat dua ini melalui R , ambikan x tetap dan integrasikan terhadap $y = 0$ (P dalam gambar di atas) hingga $y = \frac{12-2x}{3}$ (Q dalam gambar di atas); kemudian integrasikan terhadap x dari $x = 0$ hingga $x = 6$. Dengan cara ini R sama sekali terliputi. Integral menjadi

$$\int_{x=0}^6 \int_{y=0}^{(12-2x)/3} (6-2x) dy dx = \int_{x=0}^6 (24 - 12x + \frac{4x^2}{3}) dx = 24$$

Bila kita mengambil arah normal satuan \mathbf{n} berlawanan dengan arah dalam gambar di atas, kita akan memperoleh hasil -24

20. Hitunglah $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$, di mana $\mathbf{A} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 3y^2z\mathbf{k}$ dan S adalah permukaan silinder $x^2 + y^2 = 16$ yang terdapat dalam oktan pertama antara $z = 0$ dan $z = 5$.

Proyeksikan S pada bidang xz seperti dalam gambar di bawah dan sebut proyeksinya R . Perhatikan bahwa proyeksi S pada bidang xy tak dapat dipergunakan disini. Maka

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_R \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dx dz}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}|}$$

Normal terhadap $x^2 + y^2 = 16$ adalah $\nabla(x^2 + y^2) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$. Jadi normal satuan terhadap S sebagaimana diperlihatkan dalam gambar di samping, adalah

$$\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{4}$$

karena $x^2 + y^2 = 16$ pada S .

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = (z\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 3y^2z\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{4}\right) = \frac{1}{4}(xz + xy)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{4} \cdot \mathbf{j} = \frac{y}{4}$$

Maka integral permukaannya sama dengan

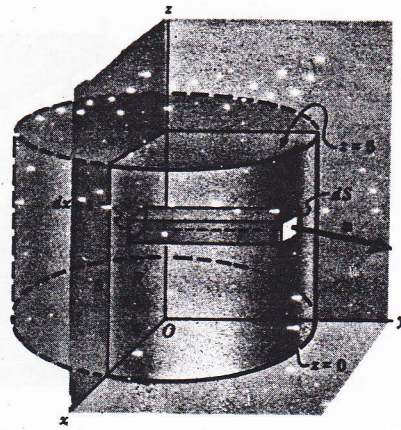
$$\iint_R \frac{xz + xy}{y} dx dz = \int_{z=0}^5 \int_{x=0}^4 \left(\frac{xz}{\sqrt{16-x^2}} + x \right) dx dz = \int_{z=0}^5 (4z + 8) dz = 90$$

21. Hitunglah $\iint_S \phi \mathbf{n} dS$ di mana $\phi = 3/8 xyz$ dan S adalah permukaan dari Soal 20.

Kita peroleh
$$\iint_S \phi \mathbf{n} dS = \iint_R \phi \mathbf{n} \frac{dx dz}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}|}$$

Pergunakan $\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{4}$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = \frac{y}{4}$ seperti dalam Soal 20, integral terakhir ini menjadi

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{3}{8} xz (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) dx dz &= \frac{3}{8} \int_{z=0}^5 \int_{x=0}^4 (x^2 z \mathbf{i} + xz \sqrt{16-x^2} \mathbf{j}) dx dz \\ &= \frac{3}{8} \int_{z=0}^5 \left(\frac{64}{3} z \mathbf{i} + \frac{64}{3} z \mathbf{j} \right) dz = 100\mathbf{i} + 100\mathbf{j} \end{aligned}$$



22. Jika $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (x - 2xz)\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$, hitunglah $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS$ di mana S adalah permukaan bola $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ di atas bidang xy .

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x - 2xz & -xy \end{vmatrix} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$$

Normal terhadap $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ adalah

$$\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

Maka normal satuan \mathbf{n} dari gambar di atas diberikan oleh

$$\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a}$$

karena $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

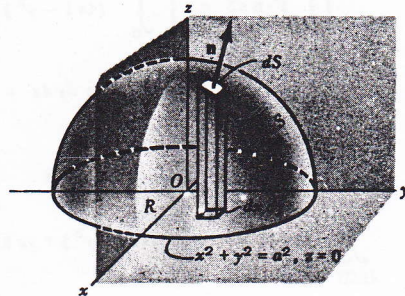
Proyeksi dari S pada bidang xy adalah daerah R yang dibatasi oleh lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ (lihat gambar di atas). Maka

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \frac{dx \, dy}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|} \\ &= \iint_R (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a} \right) \frac{dx \, dy}{z/a} \\ &= \int_{x=-a}^a \int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{3(x^2 + y^2) - 2a^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, dy \, dx \end{aligned}$$

di mana telah dipergunakan kenyataan bahwa $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Untuk menghitung integral lipat dua di atas, transformasikan ke koordinat-koordinat polar (ρ, ϕ) di mana $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$ dan $dx \, dy$ diganti oleh $\rho \, d\rho \, d\phi$. Maka integral lipat duanya menjadi

$$\begin{aligned} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a \frac{3\rho^2 - 2a^2}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho \, d\rho \, d\phi &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a \frac{3(\rho^2 - a^2) + a^2}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho \, d\rho \, d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a \left(-3\rho\sqrt{a^2 - \rho^2} + \frac{a^2\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \right) d\rho \, d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[(a^2 - \rho^2)^{3/2} - a^2\sqrt{a^2 - \rho^2} \right]_{\rho=0}^a d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} (a^3 - a^3) d\phi = 0 \end{aligned}$$

23. Jika $\mathbf{F} = 4xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$, hitunglah $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$



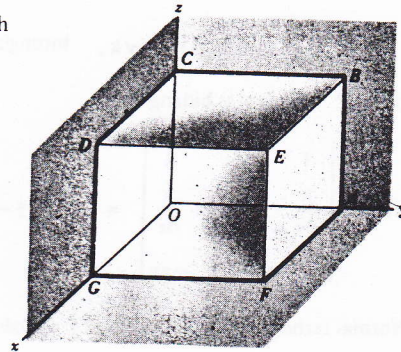
di mana S adalah permukaan kubus yang dibatasi oleh $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.

Sisi $DEFG$: $\mathbf{n} = \mathbf{i}, x = 1$. Maka

$$\begin{aligned}\iint_{DEFG} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_0^1 \int_0^1 (4z \mathbf{i} - y^2 \mathbf{j} + yz \mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 4z \, dy \, dz = 2\end{aligned}$$

Sisi $ABCO$: $\mathbf{n} = -\mathbf{i}, x = 0$. Maka

$$\iint_{ABCO} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 (-y^2 \mathbf{j} + yz \mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i}) \, dy \, dz = 0$$



Sisi $ABEF$: $\mathbf{n} = \mathbf{j}, y = 1$. Maka

$$\iint_{ABEF} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 (4xz \mathbf{i} - \mathbf{j} + z \mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} \, dx \, dz = \int_0^1 \int_0^1 -dx \, dz = -1$$

Sisi $OGDC$: $\mathbf{n} = -\mathbf{j}, y = 0$. Maka

$$\iint_{OGDC} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 (4xz \mathbf{i}) \cdot (-\mathbf{j}) \, dx \, dz = 0$$

Sisi $BCDE$: $\mathbf{n} = \mathbf{k}, z = 1$. Maka

$$\iint_{BCDE} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 (4x \mathbf{i} - y^2 \mathbf{j} + y \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 y \, dx \, dy = \frac{1}{2}$$

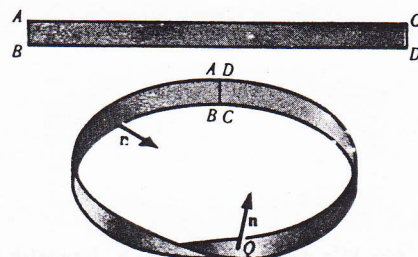
Sisi $AFGO$: $\mathbf{n} = -\mathbf{k}, z = 0$. Maka

$$\iint_{AFGO} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 (-y^2 \mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{k}) \, dx \, dy = 0$$

$$\text{Jumlahkan, } \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 2 + 0 + (-1) + 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{3}{2}.$$

24. Dalam membicarakan integral-integral permukaan kita telah membatasi diri pada permukaan-permukaan yang bersisi-dua. Berikan contoh dari sebuah permukaan yang tidak bersisi-dua.

Ambilkan selembar kertas seperti $ABCD$ yang diperlihatkan pada gambar di samping. Pelintirkan lembaran di atas sehingga titik-titik A dan B masing-masingnya jatuh pada D dan C , seperti dalam gambar di samping. Jika \mathbf{n} adalah normal positif pada titik P dari permukaan, kita dapatkan bahwa bila \mathbf{n} bergerak mengelilingi permukaan ia merubah arah semulanya ketika tiba kembali di P . Jika kita mencoba memberi warna satu sisi saja dari permukaan, akan kita dapatkan bahwa semua permukaan ternyata menjadi berwarna. Permukaan ini disebut *lembar Moebius*, yang adalah suatu contoh dari permukaan berisi-satu. Ini kadang-kadang disebut permukaan *tak dapat diorientasikan*. Permukaan berisi-dua adalah *dapat diorientasikan*.



INTEGRAL VOLUME

25. Misalkan $\phi = 45x^2y$ dan V menyatakan ruang tertutup yang dibatasi oleh bidang-bidang $4x + 2y + z = 8$,

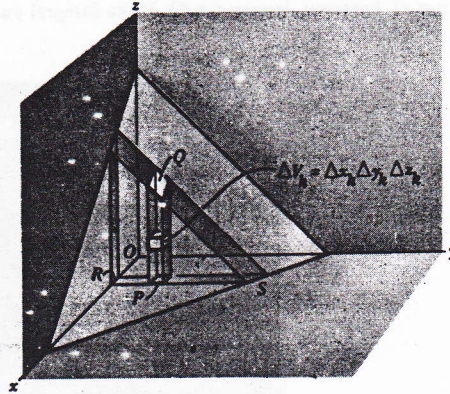
$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. (a) Nyatakan $\iiint_V \phi \, dV$ sebagai limit dari jumlah. (b) Hitunglah integral di (a).

(a) Bagikan ruang V ke dalam M buah kubus-kubus dengan volume $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$ $k = 1, 2, \dots, M$ seperti diperlihatkan dalam gambar di samping dan misalkan (x_k, y_k, z_k) sebuah titik dalam kubus ini. Definisikan $\phi(x_k, y_k, z_k) = \phi_k$. Pandang jumlah

$$(1) \quad \sum_{k=1}^M \phi_k \Delta V_k$$

yang diambil untuk semua kubus yang mungkin dalam ruang yang ditinjau. Limit dari jumlah ini, bila $M \rightarrow \infty$ sedemikian rupa sehingga kuantitas-kuantitas terbesar ΔV_k akan mendekati nol, dan jika limit ini ada, dinyatakan oleh

$\iiint_V \phi \, dV$. Dapat dilihat bahwa limit ini tak bergantung pada cara pembagiannya jika ϕ kontinu diseluruh daerah V .



Dalam membentuk jumlah (1) untuk semua kubus-kubus yang mungkin dalam ruang di atas, adalah sebaiknya diteruskan dalam cara yang beraturan. Salah satu kemungkinan adalah pertama menambahkan semua suku-suku dalam (1) yang berhubungan dengan elemen-elemen volume yang terkandung dalam sebuah kolom seperti PQ dalam gambar di atas. Ini sama artinya dengan mempertahankan x_k dan y_k tetap dan menjumlahkan terhadap semua z_k . Kemudian, pertahankan x_k tetap dan menjumlahkan terhadap semua y_k . Ini sama artinya dengan menjumlahkan semua kolom-kolom seperti PQ yang terkandung dalam lempengan RS , dan sebagai akibatnya sama artinya dengan menjumlahkan semua kubus-kubus yang terkandung dalam lempengan demikian. Akhirnya, rubah x_k . Ini sama artinya dengan menjumlahkan semua lempengan seperti RS .

Dalam proses yang diutarakan di atas, penjumlahan pertama dilakukan terhadap z_k kemudian terhadap y_k dan akhirnya terhadap x_k . Namun demikian, penjumlahan ini jelas dapat dilakukan dalam sebarang urutan lainnya.

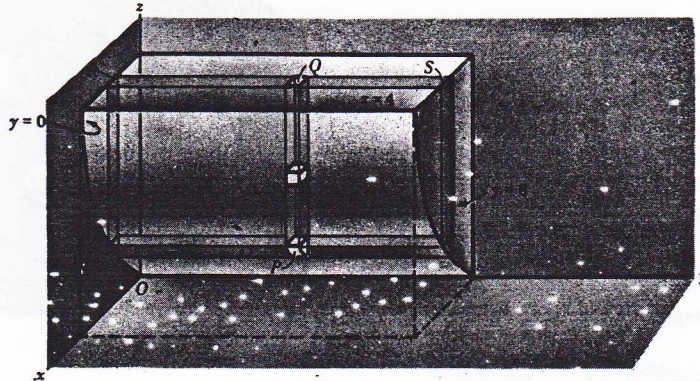
(b) Ide yang terkandung dalam metode penjumlahan yang diutarakan di (a) dapat dipergunakan untuk menghitung integralnya. Ambilkan x dan y tetap, dan integrasikan dari $z = 0$ (alas dari kolom PQ) hingga $z = 8 - 4x - 2y$ (tutup atas dari kolom PQ). Kemudian ambilkan x tetap dan integrasikan terhadap y . Ini sama artinya dengan penjumlahan kolom-kolom dengan alas pada bidang xy ($z = 0$) yang terletak dalam ruang dari R (dimana $y = 0$) hingga S (dimana $4x + 2y = 8$ atau $y = 4 - 2x$), dan integrasinya dari $y = 0$ hingga $y = 4 - 2x$. Akhirnya, kita jumlahkan semua lempengan yang sejajar bidang yz , yang sama artinya dengan integrasi dari $x = 0$ hingga $x = 2$. Integrasinya dapat dituliskan

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{4-2x} \int_{z=0}^{8-4x-2y} 45x^2y \, dz \, dy \, dx &= 45 \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{4-2x} x^2y(8-4x-2y) \, dy \, dx \\ &= 45 \int_{x=0}^2 \frac{1}{3}x^2(4-2x)^3 \, dx = 128 \end{aligned}$$

Catatan : Secara fisis, hasilnya dapat diinterpretasikan sebagai massa dari ruang V di mana kerapatannya ϕ berubah-ubah menurut $\phi = 45x^2y$.

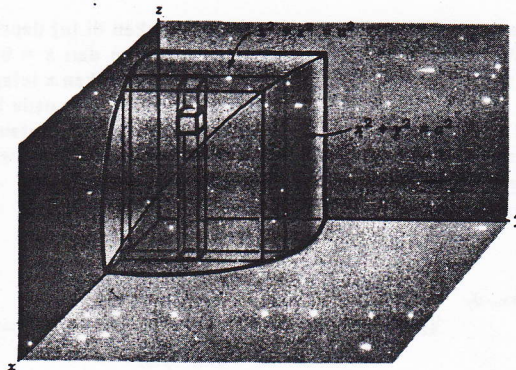
26. Misalkan $F = 2xz\mathbf{i} - x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$. Hitunglah $\iiint_V F \, dV$ di mana V adalah ruang yang dibatasi oleh permukaan-permukaan $x=0$, $y=0$, $y=6$, $z=x^2$, $z=4$.

Ruang V terselubungi dengan (a) mempertahankan x dan y tetap dan integrasikan dari $z = x^2$ hingga $z = 4$ (alas ke tutup atas dari kolom PQ), (b) kemudian pertahankan x dan y tetap dan integrasikan dari $y = 0$ hingga $y = 6$ (R ke S dalam lempengan), (c) akhirnya, integrasikan dari $x = 0$ hingga $x = 2$ (dimana $z = x^2$ bertemu dengan $z = 4$). Maka integral yang diinginkan adalah :



$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^6 \int_{z=x^2}^4 (2xz\mathbf{i} - x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}) \, dz \, dy \, dx \\ &= \mathbf{i} \int_0^2 \int_0^6 \int_{x^2}^4 2xz \, dz \, dy \, dx - \mathbf{j} \int_0^2 \int_0^6 \int_{x^2}^4 x \, dz \, dy \, dx + \mathbf{k} \int_0^2 \int_0^6 \int_{x^2}^4 y^2 \, dz \, dy \, dx \\ &= 128\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 384\mathbf{k} \end{aligned}$$

27. Carilah volume dari ruang yang merupakan irisan antara silinder-silinder $x^2 + y^2 = a^2$ dan $x^2 + z^2 = a^2$.



Volume yang diinginkan = 8 kali volume dari ruang yang diperlihatkan dalam gambar di atas

$$\begin{aligned}
 &= 8 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz dy dx \\
 &= 8 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2} dy dx = 8 \int_{x=0}^a (a^2-x^2) dx = \frac{16a^3}{3}
 \end{aligned}$$

Soal-soal Tambahan

28. Jika $\mathbf{R}(t) = (3t^2 - t)\mathbf{i} + (2 - 6t)\mathbf{j} - 4t\mathbf{k}$, carilah (a) $\int \mathbf{R}(t) dt$ dan (b) $\int_2^4 \mathbf{R}(t) dt$.

Jawab. (a) $(t^3 - t^2/2)\mathbf{i} + (2t - 3t^2)\mathbf{j} - 2t^2\mathbf{k} + \mathbf{c}$ (b) $50\mathbf{i} - 32\mathbf{j} - 24\mathbf{k}$

29. Hitunglah $\int_0^{\pi/2} (3 \sin u \mathbf{i} + 2 \cos u \mathbf{j}) du$ Jawab. $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

30. Jika $\mathbf{A}(t) = t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (t-1)\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B}(t) = 2t^2\mathbf{i} + 6t\mathbf{k}$, hitunglah (a) $\int_0^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dt$, (b) $\int_0^2 \mathbf{A} \times \mathbf{B} dt$.

Jawab. (a) 12 (b) $-24\mathbf{i} - \frac{40}{3}\mathbf{j} + \frac{64}{5}\mathbf{k}$

31. Misalkan $\mathbf{A} = t\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + t\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Hitunglah (a) $\int_1^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} dt$, (b) $\int_1^2 \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) dt$. Jawab. (a) 0 (b) $-\frac{87}{2}\mathbf{i} - \frac{44}{3}\mathbf{j} + \frac{15}{2}\mathbf{k}$

32. Percepatan \mathbf{a} dari sebuah partikel pada sebarang saat $t \geq 0$ diberikan oleh $\mathbf{a} = e^{-t}\mathbf{i} - 6(t+1)\mathbf{j} + 3 \sin t \mathbf{k}$. Jika kecepatan \mathbf{v} dan perpindahan \mathbf{r} adalah nol pada saat $t = 0$, carilah \mathbf{v} dan \mathbf{r} pada sebarang saat.

Jawab. $\mathbf{v} = (1 - e^{-t})\mathbf{i} - (3t^2 + 6t)\mathbf{j} + (3 - 3 \cos t)\mathbf{k}$, $\mathbf{r} = (t - 1 + e^{-t})\mathbf{i} - (t^3 + 3t^2)\mathbf{j} + (3t - 3 \sin t)\mathbf{k}$

33. Percepatan \mathbf{a} dari sebuah benda pada sebarang saat t diberikan oleh $\mathbf{a} = -g\mathbf{j}$, dimana g sebuah konstanta. Pada saat $t = 0$ kecepatan diberikan oleh $\mathbf{v} = v_0 \cos \theta_0 \mathbf{i} + v_0 \sin \theta_0 \mathbf{j}$ dan perpindahan $= 0$. Carilah \mathbf{v} dan \mathbf{r} pada sebarang saat $t > 0$. Ini menggambarkan gerak sebuah peluru yang ditembakkan dari sebuah meriam yang membuat sudut θ_0 terhadap sumbu $-x$ positif dengan kecepatan awal yang besarnya v_0

Jawab. $\mathbf{v} = v_0 \cos \theta_0 \mathbf{i} + (v_0 \sin \theta_0 - gt)\mathbf{j}$, $\mathbf{r} = (v_0 \cos \theta_0)t\mathbf{i} + [(v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2]\mathbf{j}$

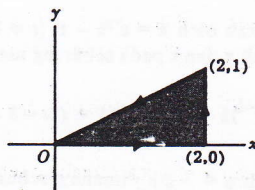
34. Hitunglah $\int_2^3 \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} dt$ jika $\mathbf{A}(2) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ dan $\mathbf{A}(3) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Jawab. 10

35. Carilah kecepatan luas sebuah partikel yang bergerak sepanjang lintas $\mathbf{r} = a \cos \omega t \mathbf{i} + b \sin \omega t \mathbf{j}$ di mana a, b, ω adalah konstanta-konstanta dan t waktu. Jawab. $\frac{1}{2}ab\omega \mathbf{k}$.

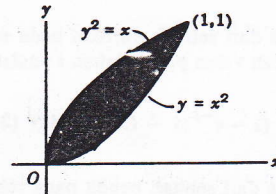
36. Buktikan bahwa kuadrat periode dari planet-planet dalam geraknya mengelilingi matahari berbanding-lurus dengan pangkat tiga sumbu panjang dari lintasan-lintasan elipsnya (Hukum Kepler ketiga)

37. Jika $\mathbf{A} = (2y+3)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (yz-x)\mathbf{k}$, hitunglah $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ sepanjang lintasan-lintasan C berikut :

- (a). $x = 2t^2, y = t, z = t^3$ dari $t = 0$ hingga $t = 1$,
 (b). garis-garis lurus dari $(0, 0, 0)$ ke $(0, 0, 1)$, kemudian ke $(0, 1, 1)$ dan kemudian ke $(2, 1, 1)$,
 (c). garis lurus yang menghubungkan $(0, 0, 0)$ dan $(2, 1, 1)$ Jawab. (a) $288/35$ (b) 10 (c) 8
38. Jika $\mathbf{F} = (5xy - 6x^2)\mathbf{i} + (2y - 4x)\mathbf{j}$, hitunglah $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ sepanjang kurva C dalam bidang $xy, y = x^3$ dari titik $(1, 1)$ ke $(2, 8)$. Jawab. 35
39. Jika $\mathbf{F} = (2x + y)\mathbf{i} + (3y - x)\mathbf{j}$, hitunglah $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ di mana C adalah kurva dalam bidang xy yang terdiri atas garis-garis lurus $(0, 0)$ ke $(2, 0)$ dan kemudian ke $(3, 2)$. Jawab. 11
40. Carilah usaha yang dilakukan dalam menggerakkan sebuah partikel dalam medan gaya $\mathbf{F} = 3x^2\mathbf{i} + (2xz - y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ sepanjang
 (a) garis-lurus dari $(0, 0, 0)$ ke $(2, 1, 3)$
 (b) kurva ruang $x = 2t^2, y = t, z = 4t^2 - t$ dari $t = 0$ ke $t = 1$.
 (c) kurva yang didefinisikan oleh $x^2 = 4y, 3x^3 = 8z$ dari $x = 0$ ke $x = 2$.
 Jawab. (a) 16 (b) 14,2 (c) 16
41. Hitunglah $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ di mana $\mathbf{F} = (x - 3y)\mathbf{i} + (y - 2x)\mathbf{j}$ dan C adalah kurva tertutup dalam bidang xy , $x = \cos t, y = 3 \sin t$ dari $t = 0$ hingga $t = 2\pi$.
 Jawab. 6π , jika C dilintasi dalam arah positif (berlawanan arah jarum jam).
42. Jika \mathbf{T} sebuah vektor singgung satuan terhadap kurva $C, \mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$, perlihatkan bahwa usaha yang dilakukan dalam menggerakkan sebuah partikel dalam sebuah medan gaya \mathbf{F} sepanjang C diberikan oleh $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ di mana S adalah panjang busur.
43. Jika $\mathbf{F} = (2x + y^2)\mathbf{i} + (3y - 4x)\mathbf{j}$, hitunglah $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ mengelilingi segitiga C dari Gambar 1, (a) dalam arah yang diperlihatkan, (b) berlawanan terhadap arah yang diperlihatkan.
 Jawab. (a) $-14/3$ (b) $14/3$.



Gambar 1



Gambar 2

44. Hitunglah $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ mengelilingi kurva tertutup C dari Gamb. 2 di atas jika $\mathbf{A} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$.
 Jawab. $2/3$.
45. Jika $\mathbf{A} = (y - 2x)\mathbf{i} + (3x + 2y)\mathbf{j}$, hitunglah sirkulasi \mathbf{A} mengelilingi sebuah lingkaran C dalam bidang xy dengan pusat di titik asal dan jejari 2, jika C dilintasi dalam arah positif. Jawab. 8π
46. (a) Jika $\mathbf{A} = (4xy - 3x^2z^2)\mathbf{i} + 2x^2\mathbf{j} - 2x^3z\mathbf{k}$, buktikan bahwa $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ tak bergantung pada kurva C yang menghubungkan dua buah titik yang diberikan. (b) Perlihatkan bahwa ada terdapat suatu fungsi diferensiabel ϕ sehingga $\mathbf{A} = \nabla\phi$ dan carilah fungsi itu.
 Jawab. (b) $\phi = 2x^2y - x^3z^2 + \text{konstanta}$.
47. (a) Buktikan bahwa $\mathbf{F} = (y^2 \cos x + z^3)\mathbf{i} + (2y \sin x - 4)\mathbf{j} + (3xz^2 + 2)\mathbf{k}$ adalah suatu medan konservatif.
 (b) Carilah potensial skalar untuk \mathbf{F} .

(c) Carilah usaha yang dilakukan dalam menggerakkan sebuah obyek dalam medan ini dari $(0, 1, -1)$ hingga $(\pi/2, -1, 2)$

Jawab. (b) $\phi = y^2 \sin x + xz^3 - 4y + 2z + \text{konstanta}$. (c) $15 + 4\pi$

48. Buktikan bahwa $\mathbf{F} = r^2 \mathbf{r}$ adalah konservatif dan carilah potensial skalarnya. Jawab. $\phi = \frac{r^4}{4} + \text{konstanta}$

49. Tentukan apakah medan gaya $\mathbf{F} = 2xz \mathbf{i} + (x^2 - y) \mathbf{j} + (2z - x^2) \mathbf{k}$ konservatif atau tidak-konservatif. Jawab. Tidak konservatif.

50. Perhatikan bahwa usaha yang dilakukan pada sebuah partikel dalam menggerakkannya dari A hingga B sama dengan perubahan energi kinetik pada titik-titik ini, tak bergantung pada apakah medan gayanya konservatif atau tidak.

51. Hitunglah $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ sepanjang kurva $x^2 + y^2 = 1, z = 1$ dalam arah positif dari $(0, 1, 1)$ hingga $(1, 0, 1)$ jika $\mathbf{A} = (yz + 2x) \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + (xy + 2z) \mathbf{k}$. Jawab. 1.

52. (a) Jika $\mathbf{E} = r\mathbf{r}$, apakah terdapat sebuah fungsi ϕ sehingga $\mathbf{E} = -\nabla\phi$? Jika demikian, carilah. (b) Hitung-

lah $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ jika C sebarang kurva tertutup sederhana. Jawab. (a) $\phi = -\frac{r^3}{3} + \text{konstan}$

(b) 0

53. Perhatikan bahwa $(2x \cos y + z \sin y) dx + (xz \cos y - x^2 \sin y) dy + x \sin y dz$ adalah suatu diferensial eksak. Karena itu, pecahkan persamaan diferensial $(2x \cos y + z \sin y) dx + (xz \cos y - x^2 \sin y) dy + x \sin y dz = 0$. Jawab. $x^2 \cos y + xz \sin y = \text{konstan}$.

54. Pecahkan (a) $(e^{-y} + 3x^2 y^2) dx + (2x^3 y - xe^{-y}) dy = 0$,

(b) $(z - e^{-x} \sin y) dx + (1 + e^{-x} \cos y) dy + (x - 8z) dz = 0$.

Jawab. (a) $xe^{-y} + x^3 y^2 = \text{konstan}$ (b) $xz + e^{-x} \sin y + y - 4z^2 = \text{konstan}$

55. Jika $\phi = 2xy^2z + x^2y$, hitunglah $\int_C \phi d\mathbf{r}$ di mana C .

(a) adalah kurva $x=t, y=t^2, z=t^3$ dari $t=0$ hingga $t=1$.

(b) terdiri atas garis-garis lurus dari $(0, 0, 0)$ ke $(1, 0, 0)$, kemudian ke $(1, 1, 0)$ dan kemudian ke $(1, 1, 1)$.

Jawab. (a) $\frac{19}{45} \mathbf{i} + \frac{11}{15} \mathbf{j} + \frac{75}{77} \mathbf{k}$ (b) $\frac{1}{2} \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

56. Jika $\mathbf{F} = 2y \mathbf{i} - z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$, hitunglah $\int_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r}$ sepanjang kurva $x = \cos t, y = \sin t, z = 2 \cos t$ dari $t=0$ hingga $t=\pi/2$. Jawab. $(2 - \frac{\pi}{4}) \mathbf{i} + (\pi - \frac{1}{2}) \mathbf{j}$

57. Jika $\mathbf{A} = (3x+y) \mathbf{i} - x \mathbf{j} + (y-2) \mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, hitunglah $\oint_C (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times d\mathbf{r}$ mengelilingi lingkaran dalam bidang xy yang berpusat di titik asal dan berjari 2 yang dilintasi dalam arah positif. Jawab. $4\pi(7\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$

58. Hitunglah $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ untuk tiap-tiap kasus berikut.

(a) $\mathbf{A} = y \mathbf{i} + 2x \mathbf{j} - z \mathbf{k}$ dan S adalah permukaan bidang $2x + y = 6$ dalam oktan pertama yang dipotong oleh bidang $z = 4$

(b) $\mathbf{A} = (x+y^2) \mathbf{i} - 2x \mathbf{j} + 2yz \mathbf{k}$ dan S adalah permukaan bidang $2x + y + 2z = 5$ dalam oktan pertama. Jawab. (a) 108 (b) 81

59. Jika $\mathbf{F} = 2y \mathbf{i} - z \mathbf{j} + x^2 \mathbf{k}$ dan S adalah permukaan silinder parabolik $y^2 = 8x$ dalam oktan pertama yang

dibatasi oleh bidang-bidang $y = 4$ dan $z = 6$, hitunglah $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$.
 Jawab. 132

60. Hitunglah $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$ melalui seluruh permukaan S dari daerah yang dibatasi oleh silinder $x^2 + z^2 = 9$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ dan $y = 8$, jika $\mathbf{A} = 6z\mathbf{i} + (2x+y)\mathbf{j} - z\mathbf{k}$. Jawab. 18π .

61. Hitunglah $\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, dS$ melalui : (a) permukaan S dari kubus satuan yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat dan bidang-bidang $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$; (b) permukaan sebuah bola berjari a dengan pusat di $(0, 0, 0)$. Jawab. (a) 3 (b) $4\pi a^3$

62. Hitunglah $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$ melalui seluruh permukaan dari daerah di atas bidang xy yang dibatasi oleh kerucut $z^2 = x^2 + y^2$ dan bidang $z = 4$, jika $\mathbf{A} = 4xz\mathbf{i} + xyz^2\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$. Jawab. 320π

63. (a) Misalkan R adalah proyeksi dari sebuah permukaan S di atas bidang xy . Buktikan bahwa luas permukaan S diberikan oleh $\iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$ jika persamaan untuk S adalah $z = f(x, y)$,

- (b) Lalu bagaimana luas permukaannya jika S memiliki persamaan $F(x, y, z) = 0$?

Jawab.
$$\iint_R \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} \, dx \, dy$$

64. Carilah luas permukaan dari bidang $x + 2y + 2z = 12$ yang dipotong oleh (a) $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$; (b) $x = 0$, $y = 0$, dan $x^2 + y^2 = 16$. Jawab. (a) $3/2$ (b) 6π

65. Carilah luas permukaan dari daerah yang merupakan persekutuan irisan silinder-silinder $x^2 + y^2 = a^2$ dan $x^2 + z^2 = a^2$. Jawab. $16a^2$

66. Hitunglah (a) $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS$ dan (b) $\iint_S \phi \, \mathbf{n} \, dS$ jika $\mathbf{F} = (x+2y)\mathbf{i} - 3z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, $\phi = 4x + 3y - 2z$, dan S adalah permukaan $2x + y + 2z = 6$ yang dibatasi oleh $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ dan $y = 2$.
 Jawab (a) 1 (b) $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

67. Pecahkan soal di atas jika S adalah permukaan $2x + y + 2z = 6$ yang dibatasi oleh $x = 0$, $y = 0$ dan $z = 0$.
 Jawab. (a) $9/2$ (b) $72\mathbf{i} + 36\mathbf{j} + 72\mathbf{k}$

68. Hitunglah $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$ melalui daerah R dalam bidang xy yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 36$.
 Jawab. 144π

69. Hitunglah $\iiint_V (2x+y) \, dV$, dimana V adalah ruang tertutup yang dibatasi oleh silinder $z = 4 - x^2$ dan bidang-bidang $x = 0$, $y = 0$, $y = 2$ dan $z = 0$. Jawab. $80/3$

70. Jika $\mathbf{F} = (2x^2 - 3z)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} - 4x\mathbf{k}$, hitunglah (a) $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$ dan (b) $\iiint_V \nabla \times \mathbf{F} \, dV$, di

mana V adalah ruang tertutup yang dibatasi oleh bidang-bidang $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ dan $2x + 2y + z = 4$.

Jawab. (a) $\frac{8}{3}$ (b) $\frac{8}{3}(\mathbf{i} - \mathbf{k})$